ÜBER

DIE GEMEINSAMKEIT PARTICULÄRER INTEGRALE

BEI ZWEI LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

G. v. ESCHERICH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 13. JULI 1882.

I.

Die Herren Frobenius und Thomé wurden in ihren bekannten Arbeiten über die linearen Differentialgleichungen wiederholt auf Fragen geführt, deren Lösung die Bildung einer Differentialgleichung beanspruchte, welche die sämmtlichen zwei gegebenen homogenen linearen Differentialgleichungen gemeinsamen particulären Integrale und nur diese zu particulären Integralen hat. Zur Herstellung dieser Gleichung bedienten sie sich eines vom Herrn Brassinne in der Note III von Sturm's Cours d'Analyse angegebenen Verfahrens, welches der Bestimmung der Resultante zweier algebraischer Gleichungen durch Aufsuchung ihres grössten gemeinsamen Masses nachgebildet ist: ein Verfahren, das mit seinem algebraischen Vorbilde alle die Mängel theilt, welche die Mathematiker zwangen, dieses trotz der Verbesserungen Jacobi's (Crelle Journal Bd. 15) durch andere Methoden zu ersetzen. Ich versuche in den folgenden Blättern das Nämliche für den von Herrn Brassinne behandelten Fall zweier homogenen linearen Differentialgleichungen und zeige, dass das Verschwinden der Determinante, welche durch Elimination der abhängigen Variablen aus denselben gewonnen wird, nicht nur eine nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung darstellt, damit die beiden Gleichungen ein particuläres Integral gemeinsam haben. Aus dieser Determinante, welche ich der Analogie mit den algebraischen Gleichungen halber die Resultante der beiden Differentialgleichungen nenne, leite ich sodann ab die Criterien zur Entscheidung über die Anzahl der zwei solchen Differentialgleichungen gemeinsamen linear unabhängigen particulären Integrale und die Differentialgleichung derselben. Vermöge dieser Gleichung kommt dann die Integration irgend einer der gegebenen Gleichungen zurück auf diejenige der Gleichung der gemeinsamen Integrale und einer anderen homogenen linearen Differentialgleichung, deren Ordnung gleich ist dem Unterschiede zwischen den Ordnungen dieser beiden Gleichungen. Schliesslich zeige ich, wie sich mit Hilfe dieser Ergebnisse auch die Resultante irgend zweier linearer Differentialgleichungen aufstellen lässt. Anwendungen der entwickelten Formeln habe ich nur in geringer Zahl und nur beispielsweise beigefügt, da die vielen Anwendungen, welche der Begriff der Resultante zumal für die Integration gegebener Differentialgleichungen zulässt, mir einer speciellen eingehenden Behandlung werth zu sein scheinen. Nur eine der beigebrachten will ich hier hervorheben: die Bildung gewisser Functionen, welche für die Theorie der homogenen linearen

Differentialgleichungen eine ähnliche Bedeutung zu besitzen scheinen, wie die symmetrischen für die Theorie der algebraischen Gleichungen.

Die meisten der hier angestellten Untersuchungen lassen sich übrigens, wie ich hier schon ankündigen will, allerdings auf ganz anderem Wege, auch auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen, in denen die abhängigen Variablen und ihre Derivirten rational an einander gebunden sind und ich behalte mir vor, bei einer anderen Gelegenheit die einschlägigen Ergebnisse darzulegen.

II.

Die oben definirte Resultante zweier homogenen linearen Differentialgleichungen, die der Kürze halber mit R bezeichnet werden mag, lässt sich, wie ohne weiters klar ist, als die Resultante eines Systems linearer Gleichungen darstellen.

Es seien

$$F(x, y, \dots y^{(n)}) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} \dots + a_n y = 0 \tag{1}$$

$$f(x, y, \dots y^{(m)}) = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} \dots + b_n y = 0 \tag{2}$$

die beiden gegebenen homogenen Differentialgleichungen. Durch $k$malige Differentiation dieser beiden Gleichungen nach x, ergebe sich

$$F^{(k)}(x, y, \dots y^{(n)}) = \sum_{r=0}^{r=n+k} a_r^k \, y^{n+k-r}$$

$$f^{(k)}(x, y, \dots y^{(m)}) = \sum_{r=0}^{r=m+k} b_r^k \, y^{m+k-r},$$

wo also

$$a_r^k = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \binom{k}{\lambda} a_{r-\lambda}^{(\lambda)}$$

$$b_r^k = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \binom{k}{\lambda} b_{r-\lambda}^{(\lambda)}$$

ist, wenn die oberen eingeklammerten Indices Differentiations-Indices bedeuten. Eine nothwendige Bedingung, damit die beiden Differentialgleichungen ein particuläres Integral y_1 gemeinsam haben, erhält man durch Elimination der Grössen $y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{m+n-1}$ aus dem Systeme der $m+n$ Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y_1, y_1' \dots y_1^{(n)}) = 0;\; F'(x, y_1, y_1' \dots y_1^{(n)}) = 0 \dots F_1^{(m-1)}(x, y_1, y_1' \dots y_1^{(n)}) = 0 \\ &f(x, y_1, y_1' \dots y_1^{(m)}) = 0;\; f'(x, y_1, y_1' \dots y_1^{(m)}) = 0 \dots f^{(n-1)}(x, y_1, y_1' \dots y_1^{(m)}) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Sie besteht also in dem Verschwinden der Determinante dieses nach $y_1, y_1' \dots y_1^{(m+n-1)}$ linearen Systems von Gleichungen, also in der Relation:

$$R = \begin{vmatrix} a_0^{m-1}, & a_1^{m-1}, & \dots\dots\dots\dots & a_{n+m-1}^{m-1} \\ 0 \;, & a_0^{m-2}, & \dots\dots\dots\dots & a_{n+m-2}^{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 \;, & 0 \;, & \dots a_0,\; a_1 \dots & a_n \\ b_0^{n-1}, & b_1^{n-1}, & \dots\dots\dots\dots & b_{n+m-1}^{n-1} \\ 0 \;, & b_0^{n-2}, & \dots\dots\dots\dots & b_{n+m-2}^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 \;, & 0 \;, & \dots b_0,\; b_1 \dots & b_m \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Um nun zu zeigen, dass diese Gleichung auch die hinreichende Bedingung ausdrückt, damit die beiden Differentialgleichungen $F = 0$ und $f = 0$ ein particuläres Integral gemeinsam haben, nehme ich an,

$y_1, y_2 \dots y_n$ sei ein „Fundamentalsystem particulärer Integrale" der ersten und $z_1, z_2 \dots z_m$ ein solches der zweiten Gleichung und multiplicire die obige Determinante $(m+n)$ten Grades R zeilenweise mit der folgenden

$$P = \begin{vmatrix} y_1^{(n+m-1)}, & y_1^{(n+m-2)} & \dots y_1' \,. & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n+m-1)}, & y_n^{(n+m-2)} & \dots y_n' \,. & y_n \\ z_1^{(n+m-1)}, & z_1^{(n+m-2)} & \dots z_1' \,, & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_m^{(n+m-1)}, & z_m^{(n+m-2)} & \dots z_m', & z_m \end{vmatrix}$$

Als Product derselben ergibt sich:

$$P.R = \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(y_1), & F^{(m-2)}(y_1) \dots F(y_1); & f^{(n-1)}(y_1), & f^{(n-2)}(y_1) \dots f(y_1), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(m-1)}(y_n), & F^{(m-2)}(y_n) \dots F(y_n); & f^{(n-1)}(y_n), & f^{(n-2)}(y_n) \dots f(y_n), \\ F^{(m-1)}(z_1), & F^{(m-2)}(z_1) \dots F(z_1); & f^{(n-1)}(z_1), & f^{(n-2)}(z_1) \dots f(z_1), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(m-1)}(z_m), & F^{(m-2)}(z_m) \dots F(z_m); & f^{(n-1)}(z_m), & f^{(n-2)}(z_m) \dots f(z_m), \end{vmatrix}$$

wo $F^{(k)}(\eta)$ und $f^{(k)}(\eta)$ bedeuten, dass bezüglich in $F^{(k)}(x, y \dots y^{(n)})$ und $f^{(k)}(x, y \dots y^{(m)})$ für $y : \eta$ substituirt wurde. In dieser Determinante haben aber sowohl die n ersten Zeilen mit den m ersten Colonnen, als auch die m letzten Zeilen mit den n letzten Colonnen lauter verschwindende Elemente gemeinsam, und es zerfällt daher diese Determinante $(m+n)$ten Grades aus jedem dieser Gründe in das Product einer Determinante $n$ten und $m$ten Grades, und zwar ist

$$PR = (-1)^{n.m} \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(z_1) \dots F(z_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F^{(m-1)}(z_m) \dots F(z_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f^{(n-1)}(y_1) \dots f(y_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f^{(n-1)}(y_n) \dots f(y_n) \end{vmatrix} \tag{5}$$

Aber auch P lässt sich in zweifacher Weise transformiren. Multiplicirt man in P die erste Colonne mit a_0^{m-1} und addirt hiezu jede nachfolgende, multiplicirt mit dem Coëfficienten, welcher in $F^{(m-1)}(y_1)$ der betreffenden in dieser Colonne stehenden Derivirten von y_1 zugehört, verfährt in ähnlicher Weise mit der neuen Determinante, indem man in ihr die zweite Colonne mit a_0^{m-2} multiplicirt und zu dieser jede nachfolgende mit dem Coëfficienten der betreffenden Derivirten von y_1 in $F^{(m-2)}(y_1)$ multiplicirt, addirt und setzt dieses Verfahren fort, bis die $m$te Colonne transformirt ist, so haben in der so gewonnenen Determinante $(m+n)$ten Grades

$$P = \frac{1}{a_0^{m-1}, \; a_0^{m-2} \dots a_0} \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(y_1) \dots F(y_1), & y_1^{(n-1)} \dots y_1 \\ \cdot & \cdot \\ F^{(m-1)}(y_n) \dots F(y_n), & y_1^{(n-1)} \dots y_n \\ F^{(m-1)}(z_1) \dots F(z_1), & z_1^{(n-1)} \dots z_1 \\ \cdot & \cdot \\ F^{(m-1)}(z_m) \dots F(z_m), & z_m^{(n-1)} \dots z_m \end{vmatrix}$$

die n ersten Zeilen mit den m ersten Colonnen lauter verschwindende Elemente gemeinsam und es zerfällt daher dieselbe in das Product einer Determinante $m$ten und $n$ten Grades. Es ergibt sich auf diese Weise, da $a_0^k = a_0$ ist,

$$P = \frac{(-1)^{n.m}}{a_0^m} \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} \dots y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n^{(n-1)} \dots y_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(z_1) \dots F(z_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F^{(m-1)}(z_m) \dots F(z_m) \end{vmatrix}$$

oder, indem für die erste Determinante dieses Productes ihr Werth eingesetzt wird,

$$P = \frac{(-1)^{n.m}}{a_0^m} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(z_1) \dots F(z)_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F^{(m-1)}(z_m) \dots F(z_m) \end{vmatrix}$$

In ganz analoger Weise erhält man für P den zweiten Ausdruck:

$$P = \frac{1}{b_0^n} e^{-\int \frac{b_1}{b_0} dx} \begin{vmatrix} f^{(n-1)}(y_1) \dots f(y_1) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(y_n) \dots f(y_n) \end{vmatrix}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in $P.R$ findet man für R die beiden Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} R &= a_0^m e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \begin{vmatrix} f^{(n-1)}(y_1) \dots f(y_1) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(y_n) \dots f(y_n) \end{vmatrix} \\ R &= (-1)^{n \cdot m} b_0^n e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx} \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(z_1) \dots F(z_1) \\ \dots\dots\dots \\ F^{(m-1)}(z_m) \dots F(z_m) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wie diese Formeln lehren, verschwinden R und die beiden rechtsstehenden Determinanten blos zusammen. Jede der beiden Determinanten verschwindet also, was übrigens schon unmittelbar ihre Structur zeigt, wenn die beiden Differentialgleichungen ein particuläres Integral gemeinsam haben, aber auch umgekehrt können sie und somit auch R, wie ich nunmehr beweisen will, nur in diesem Falle verschwinden.

III.

Um diesen Beweis zu führen, will ich allgemein die Bedingungen aufsuchen, unter welchen eine Determinante der obigen Form verschwindet, und zu dem Behufe den Werth der Determinante

$$U = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \dots\dots u_n \\ u_1', & u_2' \dots\dots u_n' \\ \dots & \dots\dots\dots \\ u_1^{(n-2)}, & u_2^{(n-2)} \dots u_n^{(n-2)} \\ u^{(n-1)}, & u_2^{(n-1)} \dots u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

wo $u_1, u_2 \dots u_n$ Functionen von x sind, und die mit oberen Indices versehenen u nach der Lagrange'schen Bezeichnung, Differentialquotienten bedeuten, zu ermitteln suchen. Er ergibt sich durch eine leichte Transformation dieser „Determinante der Functionen" u.

Multiplicirt man nämlich in U die letzte Zeile mit v_1 und addirt zu ihr die mit $\binom{n-1}{k} v_1^{n-k}$ multiplicirten Elemente der k Zeile und verfährt so für jedes $k < n$, so geht U über in

$$U = \frac{1}{v_1} \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \dots\dots\dots u_n \\ u_1', & u_2' \dots\dots\dots u_n' \\ \dots & \dots\dots\dots \\ u_1^{(n-1)}, & u_2^{(n-2)} \dots\dots u_n^{(n-2)} \\ (u_1 v_1)^{(n-1)}, & (u_2 v_1)^{(n-1)} \dots (u_n v_1)^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Transformirt man hierin in analoger Weise und etwa mit Benützung derselben Grössen v_1 alle übrigen Zeilen, so findet man

$$U = \frac{1}{v_1^{n-1}} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \dots\dots\dots u_n \\ (u_1 v_1)', & (u_2 v_1)' \dots\dots (u_n v_1)' \\ \vdots & \\ (u_1 v_1)^{(n-1)}, & (u_2 v_1)^{(n-1)} \dots (u_n v_1)^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante unterwerfe ich mittelst anderer Grössen $v_2, v_3 \dots v_{n-1}$ einer neuen Transformation, die sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, dass nicht mit Benützung sämmtlicher Zeilen die frühere Operation ausgeführt wird. Es wird zunächst mit v_2 und mit Ausschluss der ersten Zeile an der obigen

Determinante die Transformation vollführt, in der so gewonnenen mit v_3 und mit Ausschluss der beiden ersten Zeilen und so fortgefahren bis alle Zeilen, mit Ausnahme der ersten, transformirt sind.

Man findet so

$$U = \frac{1}{v_1^{n-1} \cdot v_2^{n-2} \ldots v_{n-1}} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots u_n \\ D(v_1 u_1), & D(v_1 u_2) \ldots\ldots D(v_1 u_n) \\ D(v_2 D v_1 u_1), & D(v_2 D v_1 u_2) \ldots D(v_2 D v_1 u_n) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ D(v_{n-1} \ldots\ldots D v_2 D v_1 u_1) \ldots & D(v_{n-1} \ldots D v_2 D v_1 u_n) \end{vmatrix}$$

wo D die Differentiation des nachfolgenden Ausdruckes nach x anzeigt.

Unter gewissen Bedingungen kann man die $(n-1)$ willkürlichen Grössen $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$ derart bestimmen, dass die obige Determinante sich auf ihr Diagonalglied reducirt, und es zeigt sich, dass die Determinante nur dann verschwindet, wenn diese Bedingungen nicht stattfinden. Ist nämlich u_1 von Null verschieden, so lässt sich v_1 stets derart bestimmen, dass

$$u_1 v_1 = 1,$$

dann verschwinden aber in U alle Elemente der ersten Colonne mit Ausnahme des ersten. Ist $D(v_1 u_2)$ von Null verschieden, so kann v_2 aus der Gleichung:

$$v_2 D(v_1 u_2) = 1$$

bestimmt werden, und es verschwinden dann in U alle Elemente der zweiten Colonne, die links von der Diagonale liegen. Ist man so fortfahrend zur $i$ten Colonne gelangt, so kann man hierin alle Elemente links von der Diagonale zum Verschwinden bringen, sobald

$$D(v_{i-2}, D v_{i-3} \ldots D v_1 u_{i-1}),$$

wenn hierin für $v_1 \ldots v_{i-2}$ die aus den vorhergehenden Gleichungen sich ergebenden Werthe eingesetzt werden, von Null verschieden ist, indem man v_{i-1} derart bestimmt, dass

$$v_{i-1} D(v_{i-2} D v_{i-3} \ldots D v_1 u_{i-1}) = 1$$

ist. Man ersieht hieraus:

„Verschwindet keine der Grössen

$$u_1; \; D(v_1 u_2), \; D(v_2 D v_1 u_3) \ldots D(v_{n-1} D v_{n-2} \ldots D v_1 u_n), \tag{α}$$

wenn man in diesen Ausdrücken für $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$ die Werthe aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 v_1 &= 1 \\ v_2 D(v_1 u_2) &= 1 \\ \cdots\cdots & \\ v_{n-1} D(v_{n-2} \ldots D v_1 u_{n-1}) &= 1 \\ v_n D(v_{n-1} \ldots D v_1 u_n) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

substituirt, so hat U den von Null verschiedenen Werth"

$$U = \frac{u_1 D(v_1 u_2) D(v_2 D v_1 u_3) \ldots D(v_{n-1} D v_{n-2} \ldots D v_1 u_n)}{v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots\ldots v_{n-1}} = \frac{1}{v_1^n v_2^{n-1} \ldots v_{n-1}^2 v^n}.$$

Es kann also U nur verschwinden und verschwindet immer, wenn eine der Grössen (α) zu Null wird. Man nehme an, es sei in diesem Falle etwa

$$D(v_{i-1} D v_{i-2} \ldots D v_1 u_i) = 0, \tag{γ}$$

wo für $v_1, v_2 \dots v_{i-1}$ die Werthe aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} v_{i-1} D(v_{i-2} \dots D v_1 u_{i-1}) &= 1 \\ v_{i-2} D(v_{i-3} \dots D v_1 u_{i-2}) &= 1 \\ \dots\dots\dots & \\ v_2 D(v_1 u_2)) &= 1 \\ u_1 v_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (\beta')$$

einzusetzen sind. Aus (γ) folgt aber, wenn die c Constanten bedeuten,

$$v_{i-1} D(v_{i-2} \dots D v_1 u_i) = c_{i-1}$$

somit wegen der ersten Gleichung in (β');

$$D(v_{i-2} \dots D v_1 u_i) = c_{i-1} D(v_{i-2} \dots D u_1 v_{i-1}),$$

woraus sich wieder ergibt

$$v_{i-2} D(v_{i-3} \dots D v_1 u_i) = c_{i-1} v_{i-2} D(v_{i-3} \dots D v_1 u_{i-1}) + c_{i-2}.$$

Wegen (β') kann man hiefür schreiben:

$$D(v_{i-3} \dots D v_1 u_i) = c_{i-1} D(v_{i-3} \dots D v_1 u_{i-1}) + c_{i-2} D(v_{i-3} \dots D v_1 u_{i-2}).$$

Indem man auf diese Weise den links stehenden Ausdruck fortwährend integrirt, erhält man schliesslich:

$$u_i = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{i-1} u_{i-1},$$

wo die c Constanten bedeuten, die auch Null sein können.

Diese Formel drückt den von Herrn Frobenius mehrmals bewiesenen Satz aus:

„Verschwindet die Determinante mehrerer Functionen, so sind dieselben von einander linear abhängig."

Wendet man nun diesen Satz auf den Fall an, dass R und somit jede der rechts stehenden Determinanten in (6) verschwinden, so folgt daraus, dass dann Constante $c_1, c_2 \dots c_n$ und $c'_1, c'_2 \dots c'_m$ bestehen, für welche bezüglich

$$c_1 f(y_1) + c_2 f(y_2) + \dots + c_n f(y_n) = 0$$
$$c'_1 F(z_1) + c'_2 F(z_2) + \dots + c'_m F(z_m) = 0$$

ist. Die erste Gleichung drückt aber aus, dass das particuläre Integral

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_3 + \dots + c_n y_n$$

der Gleichung $F(x, y, \dots y^{(n)}) = 0$ auch die Gleichung $f(z, z', \dots z^{(m)}) = 0$ befriedigt, und die zweite, dass das particuläre Integral

$$z = c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + \dots + c'_m z_m$$

der Gleichung $f(z, z', \dots z^{(m)}) = 0$ auch der Gleichung $F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$ genügt.

Verschwindet somit R, so besitzen die beiden gegebenen Differentialgleichungen ein particuläres Integral gemeinsam.

IV.

Im Falle, dass R verschwindet, lässt sich der Werth des gemeinsamen particulären Integrals y_1 aus dem Gleichungssysteme (3) berechnen, indem man darin y_1 sammt seinen Abgeleiteten als Unbekannte ansieht. Die bekannten Regeln zur Auflösung eines derartigen Gleichungssystems, die man Herrn Kronecker (Baltzer, Determinanten, 4. Aufl., §. 8) verdankt, würden auch mit Leichtigkeit sowohl zur Aufstellung der Kriterien führen, die zur Entscheidung dienen, ob die beiden Gleichungen mehrere, und in welcher Anzahl sie

particuläre Integrale gemeinsam haben, als auch die Gleichung derselben ergeben. Doch ich glaube, dass diese Fragen sich übersichtlicher und unmittelbarer aus der Gleichung:

$$R = a_0^m e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \begin{vmatrix} f^{(n-1)}(y_1) \dots f(y_1) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(y_n) \dots f(y_n) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m \cdot n} b_0^n e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx} \begin{vmatrix} F^{(m-1)}(z_1) \dots F(z_1) \\ \dots\dots\dots \\ F^{(n-1)}(z_n) \dots F(z_n) \end{vmatrix}$$

beantworten lassen. Es wird hiebei offenbar blos nöthig sein, den Entwickelungen den einen, etwa den zweiten Theil dieser Doppelgleichung zu Grunde zu legen, da hieraus durch einfache Vertauschung der Buchstaben m und n, a und b die entsprechenden Regeln fliessen, die mittelst des ersten Theiles abgeleitet werden könnten.

Es sei, wenn $R = 0$ ist, $z_1 = y_1$ das gemeinsame Integral, dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{da_n^{(m-1)}} &= (-1)^{m \cdot n} . (-1)^m b_0^n e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx} z_1 \begin{vmatrix} F(z_2) \dots\dots F(z_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ F^{(m-2)}(z_2) \dots F^{(m-2)}(z_m) \end{vmatrix} \\ \frac{dR}{da_{n-k}^{(m-1)}} &= (-1)^{m \cdot n} (-1)^m b_0^n e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx} z_1^{(k)} \begin{vmatrix} F(z_2) \dots\dots F(z_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ F^{(m-2)}(z_2) \dots F^{(m-2)}(z_m) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Hieraus folgt zunächst: verschwindet $\frac{dR}{da_n^{(m-1)}}$ nicht, so kann auch, da $y = const.$ nach der stillschweigenden Voraussetzung nicht als gemeinsames Integral der beiden Gleichungen betrachtet wird, $\frac{dR}{da_{n-1}^{(m-1)}}$ nicht verschwinden. Der Werth des gemeinsamen particulären Integrals ergibt sich dann aus der Proportion:

$$\left.\begin{aligned} z^{(n)} : z^{(n-1)} : \dots z' : z &= \frac{dR}{db_0^{(n-1)}} : \frac{dR}{db_1^{(n-1)}} : \dots : \frac{dR}{db_m^{(n-1)}} \\ &= \frac{dR}{da_0^{(m-1)}} : \frac{dR}{da_1^{(m-1)}} : \dots : \frac{dR}{da_n^{(m-1)}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Aus der Gleichung (α) folgt ferner, dass mit $\frac{dR}{da_n^{(m-1)}}$ auch jeder andere Differentialquotient nach der $(m-1)$ten Derivirten irgend eines Coëfficienten a von $F = 0$ verschwindet und dass dann, wegen

$$\begin{vmatrix} F(z_2) \dots\dots F(z_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ F^{(m-2)}(z_2) \dots F^{(m-2)}(z_m) \end{vmatrix} = 0$$

die beiden Differentialgleichungen mehr als ein particuläres Integral gemeinsam haben.

Es verschwindet dann jeder Differentialquotient von R nach einem Coëfficienten oder einer Derivirten eines Coëfficienten a, da die beiden gegebenen Gleichungen mehr als ein Integral gemeinsam haben. Es verschwindet dann überdies jeder zweite Differentialquotient $\frac{d^2 R}{da_i^{(m-1)} da_k^{(m-1)}}$ für jedes beliebige i und k, jedoch nicht nothwendig die Differentialquotienten von der Form $\frac{d^2 R}{da_i^{(m-2)} da_k^{(m-2)}}$. Denn werden in diesem Falle z_1 und z_2, was unbeschadet der Allgemeinheit gestattet ist, als gemeinsame Integrale angenommen, so ist:

$$\frac{d^2R}{da_i^{(m-2)}da_k^{(m-2)}} = (-1)^{m\cdot n} b_0^n e^{\int_{b_0}^{b_1} dx} \binom{m-1}{1} \begin{vmatrix} F(z_3) \ldots\ldots F(z_m) \\ \ldots\ldots\ldots \\ F^{(m-3)}(z_3) \ldots F^{(m-3)}(z_m) \end{vmatrix} D_{ik},$$

wo

$$D_{i,k} = \begin{vmatrix} z_1^{(n-i)} , & z_2^{(n-k)} \\ z_1^{(n-i+1)} , & z_2^{(n-k+1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1^{(n-k)} , & z_2^{(n-i)} \\ z_1^{(n-k+1)} , & z_2^{(n-i+1)} \end{vmatrix}.$$

Diese Formel lehrt überdiess, dass

$$\frac{d^2R}{da_n^{(m-2)}da_n^{(m-2)}}, \frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-2)}da_n^{(m-2)}} \text{ und } \frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-2)}da_{n-1}^{(m-2)}}$$

zugleich Null oder von Null verschieden sind, da

$$D_{n,n} = 2\begin{vmatrix} z_1 \, z_2 \\ z_1' \, z_2' \end{vmatrix}$$

$$D_{n-1,n} = \begin{vmatrix} z_1 \, z_2 \\ z_1'' \, z_2'' \end{vmatrix}$$

$$D_{n-1,n-1} = 2\begin{vmatrix} z_1' \, z_2' \\ z_1'' \, z_2'' \end{vmatrix}$$

wegen der Voraussetzung, dass z_1 und z_2 demselben Fundamentalsysteme angehören, von Null verschieden sind, und also die drei obigen Differentialquotienten nur verschwinden können, wenn

$$\begin{vmatrix} F(z_3) \ldots \ldots F(z_m) \\ \ldots\ldots\ldots \\ F^{(m-3)}(z_3) \ldots F^{(m-3)}(z_m) \end{vmatrix} = 0.$$

Sie verschwinden also und können, wie diese Bedingungsgleichung zeigt, nur dann verschwinden, wenn die beiden gegebenen Differentialgleichungen ausser z_1 und z_2 mindestens noch ein Integral gemeinsam haben. Haben sie jedoch nur diese beiden Integrale gemeinsam, d. h., verschwindet nicht irgend einer der obigen drei Differentialquotienten, so sind alle particulären Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung der 2ten Ordnung

$$\frac{d^2R}{da_n^{(m-2)}da_n^{(m-2)}} z'' - 2\frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-2)}da_n^{(m-2)}} z' + \frac{d^2R}{da_{n-1}^{(m-2)}da_{n-1}^{(m-2)}} z = 0$$

und nur diese den beiden Differentialgleichungen gemeinsam.

Es hat keine Schwierigkeit, den allgemeinen Satz herzuleiten, unter den sich die eben behandelten Fälle subsummiren. Zu diesem Behufe nehme ich an, die beiden Gleichungen haben k particuläre Integrale gemeinsam und es seien diese, was ja unbeschadet der Allgemeinheit vorauszusetzen gestattet ist, die Functionen

$$z_1, z_2 \ldots z_k.$$

Es ist dann zunächst klar, dass jeder Differentialquotient von der Form

$$\frac{d^{k-\rho}R}{[da_n^{(m-k+\rho)}]^i [da_{n-1}^{(m-k+\rho)}]^{k-\rho-i}},$$

wo $\rho > 0$ ist, verschwindet, da in der Summe von Determinanten, aus welcher derselbe besteht, jede mindestens eine Zeile verschwindender Elemente besitzt, da $F(z_1) \ldots F(z_k)$ sammt ihren Differentialquotienten nach x in Folge der Voraussetzung verschwinden. Es verschwinden aber überdies auch die $k$ten Differentialquotienten des R von der Form

$$\frac{d^kR}{[da_n^{(m-k+1)}]^i [da_{n-1}^{(m-k+1)}]^{k-i}},$$

während die von der Form

$$\frac{d^k R}{\left[da_n^{(m-k)}\right]^i \left[da_{n-1}^{(m-k)}\right]^{k-i}}$$

nur in dem Falle verschwinden können, als die beiden Gleichungen mindestens ein Integral mehr gemeinsam haben, als die k vorausgesetzten $z_1, z_2, z_3 \ldots z_k$. Die Richtigkeit dieser Behauptungen leuchtet unmittelbar aus dem Ausdrucke für diese Differentialquotienten ein. Um unter der gemachten Voraussetzung dieselben zu bilden, wird es am einfachsten sein, sich die Determinante R nach dem La Place'schen Satze in ein Agregat aus Producten von Determinanten $k$ten und $(m-k)$ten Grades zerlegt zu denken und die einzelnen Producte zu differentiiren. Von deren Differentialquotienten verschwinden nun, da $F(z_1), F(z_2) \ldots F(z_k)$ sammt ihren Differentialquotienten nach x Null sind, sämmtliche mit Ausnahme desjenigen von

$$(-1)^{m \cdot n} b_0^n e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx} (-1)^{(m-k)k} \begin{vmatrix} F^{(m-k)}(z_1), & F^{(m-k)}(z_2) \ldots F^{(m-k)}(z_k) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ F^{(m-1)}(z_1), & F^{(m-1)}(z_2) \ldots F^{(m-1)}(z_k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F(z_{k+1}) \ldots\ldots F(z_m) \\ \cdots \\ \cdots \\ F^{(m-k+1)}(z_{k+1}) \ldots F^{(m-k+1)}(z_m) \end{vmatrix},$$

welcher sich wieder auf den Differentialquotienten seines ersten Factors reducirt. Von der Summe, aus welcher derselbe besteht, sind, wie zunächst ersichtlich ist, nur jene Glieder von Null verschieden, in denen sämmtliche Zeilen der Determinante differentiirt sind; aber auch von diesen verschwinden im ersten Falle wegen

$$\frac{d\left[F^{(m-k)}\right]}{da_n^{(m-k+1)}} = \frac{d\left[F^{(m-k)}\right]}{da_{n-1}^{(m-k+1)}} = 0$$

alle, während im zweiten Falle alle bis auf eines Null sind. Denn wie die Ausdrücke:

$$\frac{d\left[F^{(m-k+r)}\right]}{da_{n-1}^{(m-k)}} = \binom{m-k+r}{r} z^{r+1}$$

$$\frac{d\left[F^{(m-k+r)}\right]}{da_n^{(m-k)}} = \binom{m-k+r}{r} z^r$$

zeigen, erhält man die Glieder dieser Summe, indem man in der Determinante

$$\binom{m-k+1}{1} \cdots \binom{m-1}{k-1} \begin{vmatrix} z_1 & , z_2 & \ldots z_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(k-1)} & , z_2^{(k-1)} & \ldots z_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

auf alle möglichen Arten $(k-i)$ Zeilen heraushebt und jedesmal den Differentiations-Index in jeder derselben um eins erhöht.

Nun ist aber klar, dass, wenn in einer Zeile der obigen Determinante der Differentiations-Index um eins erhöht wird, entweder jener der folgenden ebenfalls um eins erhöht werden muss, oder die neue Determinante verschwindet; daraus folgt, dass die so abgeleitete Determinante nur dann nicht verschwindet, wenn von jener Zeile ab in jeder folgenden der Differentiations-Index um eins erhöht wird. Somit schrumpft die ganze Summe auf das Glied zusammen, in dem der Differentiations-Index jeder der letzten $(k-i)$ Zeilen der obigen Determinante um eins erhöht ist.

Also ist

$$\frac{d^k R}{\left[da_n^{(m-k)}\right]^i \left[da_{n-1}^{(m-k)}\right]^{k-i}} = i!(k-i)!M \begin{vmatrix} z_1 & \ldots z_k \\ \cdots & \cdots \\ z_1^{(i-1)} & \ldots z_k^{(i-1)} \\ z_1^{(i+1)} & \ldots z_k^{(i+1)} \\ \cdots & \cdots \\ z_1^{(k)} & \ldots z_k^{(k)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F(z_{k+1}) \ldots\ldots F(z_m) \\ \cdots \\ F^{(m-k-1)}(z_{k+1}) \ldots F^{(m-k-1)}(z_m) \end{vmatrix}. \qquad (\beta)$$

wo

$$M = (-1)^{mn+(m-k)k} \binom{m-k+1}{1} \binom{m-k+2}{2} \cdots \binom{m-1}{k-1} b_0^n e^{\int_{b_0}^{b_1} dx}.$$

Dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn entweder die gemeinsamen particulären Integrale $z_1, z_2 \ldots z_k$ nicht von einander linear-unabhängig sind, oder wenn die beiden Differentialgleichungen mehr als k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben. Berücksichtigt man daher, dass alle $k$ten Differentialquotienten von der Form

$$\frac{d^k R}{[da_n^{(m-k)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-k)}]^{k-i}}$$

blos zugleich Null oder von Null verschieden sein können, so ergeben diese Überlegungen:

Haben die beiden Differentialgleichungen k und nicht mehr als k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam, so verschwinden ausser R alle Differentialquotienten von der Form

$$\frac{d^\mu R}{[da_n^{(m-\mu)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-\mu)}]^{\mu-i}},$$

in denen $\mu < k$ ist für beliebiges $i \leqq \mu$, jedoch keiner für $\mu = k$.

Offenbar gilt auch die Umkehrung; denn verschwindet mit k und für jedes $\mu < k$ ein derartiger Differentialquotient, so haben die beiden Gleichungen mindestens k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam, da, wenn sie weniger, nur $(k-\lambda)$, gemeinsam besässen, kein Differentialquotient von der Form

$$\frac{d^{k-\lambda} R}{[da_n^{(m-k+\lambda)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-k+\lambda)}]^{k-\lambda-i}}$$

verschwinden könnte; sie können aber auch nicht mehr als k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben, da sonst die Ausdrücke

$$\frac{d^k R}{[da_n^{(m-k)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-k)}]^{k-i}}$$

verschwänden.

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich nunmehr in den Satz zusammenfassen:

„Damit die beiden gegebenen Differentialgleichungen k und nur k linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam haben, ist es nothwendig und hinreichend, dass mit R $(k-1)$ Differentialquotienten der ersten $(k-1)$ verschiedenen Ordnungen von der Form

$$\frac{d^\mu R}{[da_n^{(m-\mu)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-\mu)}]^{\mu-i}}$$

oder

$$\frac{d^\mu R}{[db_m^{(n-\mu)}]^i \, [db_{m-1}^{(n-\mu)}]^{\mu-i}}$$

Null sind, aber keiner der gemeinschaftlich verschwindenden $k$ten Differentialquotienten von der Form

$$\frac{d^k R}{[da_n^{(m-k)}]^i \, [da_{n-1}^{(m-k)}]^{k-i}}$$

oder

$$\frac{d^k R}{[db_m^{(n-k)}]^i \, [db_{m-1}^{(n-k)}]^{k-i}}.$$

Der obige Ausdruck (β) führt auch unmittelbar zur Bildung der homogenen linearen Differentialgleichung, welche aus den k gemeinsamen particulären Integralen zusammengesetzt werden kann. Diese Gleichung ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} z^{(k)}\,; & z^{k-1}\,; & \ldots z'\,; & z \\ z_1^{(k)}\,; & z_1^{(k-1)}\,; & \ldots z_1'\,; & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_k^{(k)}\,; & z_k^{(k-1)}\,; & \ldots z_k'\,; & z_k \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man dieselbe mit

$$M \begin{vmatrix} F(z_{k+1}) \ldots\ldots\ldots F(z_m) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F^{(m-k+1)}(z_{k+1}) \ldots F^{(m-k+1)}(z_m) \end{vmatrix},$$

so ersieht man, dass $z^{(i)}$ den Coëfficienten

$$\frac{1}{i!\,(k-i)!}\;\frac{[da_n^{(m-k)}]^i\,[da_{n-1}^{(m-k)}]^{k-i}}{d^k R}$$

besitzt. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^k R}{[da_n^{(m-k)}]^k}\, z^{(k)} - \binom{k}{1} \frac{d^k R}{[da^{(m-k)}]^{k-1}\, da_{n-1}^{m-k}}\, z^{(k-1)} + \ldots + (-1)^k \frac{d^k R}{[da_{n-1}^{(m-k)}]^k}\, z = 0 \\ &\text{oder symbolisch bezeichnet} \\ &\left[\frac{dR}{da_n^{(m-k)}}\, z - \frac{dR}{da_{n-1}^{(m-k)}}\right]^k = 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

die Gleichung der gemeinsamen particulären Integrale.

Anmerkung. Man kann diese Gleichung auch noch auf andere Weise gewinnen, die ich, da ihre Ableitung auf weniger Voraussetzungen beruht als die vorhergehende, kurz andeuten will.

Es sei R ein Ausdruck, dessen Verschwinden die hinreichende und nothwendige Bedingung ist, damit die beiden gegebenen Differentialgleichungen ein Integral gemeinsam haben, und in welchen höchstens die $(m-1)$ten Differentialquotienten der Coëfficienten von $F(x, y \ldots y^{(n)}) = 0$ eingehen.

Es verschwinde nun R, was anzeigt, dass die beiden Differentialgleichungen mindestens ein particuläres Integral y_1 gemeinsam haben. Ich verändere irgend zwei Coëfficienten von $F(x, y \ldots y^{(n)})$, etwa a_{n-1} und a_n, aber derart, dass

$$y_1' \,\delta a_{n-1} + y_1 \,\delta a_n = 0,$$

so dass also die neue Gleichung mit $f(z, z' \ldots z^{(m)}) = 0$ ebenfalls das Integral y_1 gemeinsam hat.

Die Resultante R' derselben und $f(z, z' \ldots z^{(m)}) = 0$ muss daher ebenfalls verschwinden und man erhält sie, indem man in R für $a_{n-1} : a_{n-1} + \delta a_{n-1}$ und für $a_n : a_n + \delta a_n$ substituirt; man findet also:

$$\begin{aligned} R' = R + \Bigg(& \frac{dR}{da_{n-1}}\,\delta a_{n-1} + \frac{dR}{da_{n-1}'}\,\delta a_{n-1}' + \ldots + \frac{dR}{da_{n-1}^{(m-1)}}\,\delta a_n^{(m-1)} \\ & + \frac{dR}{da_n}\,\delta a_n + \frac{dR}{da_n'}\,\delta a_n' + \ldots + \frac{dR}{da_n^{(m-1)}}\,\delta a_n^{(m-1)} \Bigg), \\ & + \ldots \end{aligned}$$

worin die $\delta a_{n-1}, \delta a_{n-1}' \ldots \delta a_{n-1}^{(m-1)}$ vermöge der Gleichungen:

$$\begin{aligned} & y' \,\delta a_{n-1} && + y\delta a_n = 0 \\ & y'' \,\delta a_{n-1} + y' \,\delta a_{n-1}' && + (y\delta a_n)' = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & y^{(m-1)} \,\delta a_{n-1} + \binom{m-1}{1} y^{m-2} \,\delta a_{n-1}' + \ldots && + (y\delta a_n)^{(m-1)} = 0 \end{aligned}$$

durch $\delta a_n, \delta a'_n \ldots \delta a_n^{(m-1)}$ auszudrücken sind. Da nun R' und R verschwinden, so müssen wegen der Willkürlichkeit von $\delta a_n, \delta a'_n \ldots \delta a_n^{(m-1)}$ deren und ihrer Producte Coëfficienten für sich verschwinden. Sind nun die Coëfficienten der ersten Potenzen dieser Variationen von Null verschieden, so ergibt eine kurze Rechnung zur Bestimmung von $y_1 = z_1$ die frühere Proportion (7); verschwinden sie aber identisch, so findet man aus den gleich Null gesetzten Coëfficienten der zweiten Dimensionen dieser Variationen die Gleichung p. 8.

V.

Nachdem man in den Stand gesetzt ist, die Gleichung der den beiden gegebenen homogenen linearen Differentialgleichungen gemeinsamen particulären Integrale abzuleiten, soll nun untersucht werden, welche Vortheile für die Integration der beiden gegebenen Gleichungen aus der Kenntniss dieser Gleichung erwächst.

Bezeichnet das Symbol $P(y)$, dass an y die Operation

$$p_0 \frac{d^k}{dx^k} + \ldots + p_{k-1} \frac{d}{dx} + p_k$$

vollzogen werden soll, und nennt man es in diesem Falle ein Operationssymbol der $k$ten Ordnung, so lässt sich leicht folgender Satz nachweisen:

Ist $\Phi(y)$ ein gegebener homogener linearer Differentialausdruck, der die $(m+n-1)$te Ordnung nicht übersteigt, so lassen sich stets zwei Operationssymbole P und Q bezüglich der $(m-1)$ten und $(n-1)$ten Ordnung auffinden, derart, dass

$$P[F] + Q[f] = R\Phi(y) \tag{9}$$

ist.

Es sei

$$\Phi(y) = c_0 y^{(m+n-1)} + \ldots + c_{m+n-2} y' + c_{m+n-1} y.$$

Aus dem Gleichungssysteme (3)

$$\begin{array}{lclclcl}
F^{(m-1)} & = & a_0^{m-1} y^{(m+n-1)} + \ldots + a_{m+n-i-1} y^{(i)} & + \ldots + & a_{m+n-1}^{m-1} y \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
F & = & a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-i} y^{(i)} & + \ldots + & a_n y \\
f_{(n-1)} & = & b_0^{n-1} y^{(m+n-1)} + \ldots + b_{m+n-i-1} y^{(i)} & + \ldots + & b_{m+n-1}^{n-1} y \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
f & = & b_1 y^{(m)} + \ldots + b_{m-2} y^{(i)} & + \ldots + & b_m y
\end{array}$$

findet man, wenn mit $\alpha_{i,k}$ die Subdeterminante des Elementes bezeichnet wird, das in der $(k+1)$ten Zeile und $(i+1)$ten Colonne von R steht:

$$P_i[F] + Q_i[f] = R \cdot y^{m+n-i-1},$$

wo

$$P_i = \alpha_{i,0} F^{(m-1)} + \alpha_{i,1} F^{(m-2)} + \ldots + \alpha_{i,m-1} F$$
$$Q_i = \alpha_{i,m} f^{(n-1)} + \alpha_{i,m+1} f^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{i,m+n-1} f.$$

Setzt man daher

$$P = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_{n+m-1} P_{m+n-1}$$
$$Q = c_0 Q_0 + c_1 Q_1 + \ldots + c_{n+m-1} Q_{m+n-1},$$

so ergibt sich die obige Identität.

Sind daher φ und ψ zwei homogene lineare Differentialausdrücke, deren Ordnungszahlen zur Summe $(n+1)$ haben, so lassen sich zwei Operationssymbole p und q bezüglich von der Ordnung $(\mu-1)$ und $(\nu-1)$, wenn μ die Ordnung von φ und ν jene von ψ ist, finden, derart, dass

$$rF = p[\psi] + q[\varphi],$$

wo r die Resultante von φ und ψ bedeutet.

Haben nun die beiden Differentialgleichungen $F=0$ und $\psi=0$ ν linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam, ist also $\psi=0$ selbst die Gleichung der gemeinsamen Integrale, so ist klar, dass sich die obige Gleichung auf

$$r.F=p[\psi] \tag{10}$$

reducirt.[1] Denn sind $z_1, z_2 \ldots z_\nu$, ν, gemeinschaftliche linear-unabhängige particuläre Integrale dieser beiden Gleichungen, so genügt jedes derselben, wie die obige Formel zeigt, auch der Gleichung

$$q[\varphi]=0.$$

Es sind also die ν von einander linear-unabhängigen Functionen von x

$$u_1=\varphi(z_1)\,;\; u_2=\varphi(z_2)\ldots u_\nu=\varphi(z_\nu)$$

particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$q[x,\, u,\, u' \ldots u^{(\nu-1)}]=0,$$

welche nach u von der $(\nu-1)$ten Ordnung ist, woraus folgt, dass q identisch Null ist.

Wie die Gleichung:

$$r.F=p[\psi]$$

zeigt, ist dann jedes particuläre Integral von F auch ein solches von

$$p[\psi]=0.$$

Ist daher v das allgemeine Integral der Gleichung der $(n-\nu)$ten Ordnung:

$$p(v)=0,$$

so liefert die Integration der linearen Gleichung der νten Ordnung

$$\psi=v$$

das allgemeine Integral von $F=0$.[1]

In den Ausdruck p gehen aber auch die Coëfficienten von $\varphi=0$ ein, welcher Ausdruck nur der einzigen Bedingung unterliegt, mit $\varphi=0$ kein particuläres Integral gemeinsam zu haben. Es enthält also p die $(\mu+1)$ willkürlichen Coëfficienten von φ, wodurch es möglich ist, der Gleichung $p=0$ verschiedene Formen zu geben, unter welchen die zweckentsprechendste auszuwählen ist.

Berücksichtigt man nun, dass das Integral einer linearen Differentialgleichung gegeben ist, wenn das allgemeine Integral ihrer reducirten bekannt ist, indem dann jenes auf blosse Quadraturen zurückgeführt ist, dass also die Gleichung $\psi=v$ gelöst ist, sobald dies mit $\psi=0$ der Fall ist, so kann man die vorstehenden Bemerkungen in den folgenden Satz zusammenziehen, der eine Verallgemeinerung eines sehr bekannten Theorems darstellt:

„Sind die sämmtlichen particulären Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung der $m$ten Ordnung $f=0$ in einer höheren $n$ter Ordnung $F=0$ enthalten, so kommt die Berechnung des allgemeinen Integrals der letzteren zurück auf die Integration von $f=0$ und einer anderen linearen homogenen Gleichung der $(n-m)$ten Ordnung."

Die eben entwickelte Formel (10) beruht auf der Voraussetzung, dass alle particulären Integrale von $\psi=0$ auch der Gleichung $F=0$ genügen. Diese Formel kann als ein specieller Fall der folgenden angesehen werden, welche unter der Annahme abgeleitet wird, dass die Gleichung der $n$ten Ordnung $F=0$ mit der Gleichung der $m$ten Ordnung $f=0$ nur k particuläre Integrale gemeinsam habe. Für den Fall $k=1$ zeigt die Formel (9), da $R=0$, dass sich zwei Operationssymbole P und Q bezüglich von der $(m-1)$ und $(n-1)$ten Ordnung auffinden lassen dergestalt, dass

$$P[F]=Q[f]$$

ist.

---

[1] Frobenius, Crelle's Journal f. Mathem., Bd. LXXVII, p. 258.

Haben die beiden Gleichungen kein Integral gemeinsam, so lassen sich, wie a priori klar ist, ebenfalls zwei derartige Operations-Symbole berechnen, deren jedes aber von einer um eins höheren Ordnung als im vorhergehenden Falle ist. Haben nun die Gleichungen $F = 0$ und $f = 0$ k Integrale gemeinsam und ist $\Psi = 0$ die Gleichung dieser gemeinsamen Integrale, so lässt sich, wie sich früher ergab

$$F = p[\Psi]$$
$$f = q[\Psi]$$

setzen, wo das Operationssymbol p von der Ordnung $(n-k)$ und q von der Ordnung $(m-k)$ ist.

Da nach der Voraussetzung $F = 0$ und $f = 0$ blos die Integrale der Gleichung $\Psi = 0$ gemeinsam haben, so können die Gleichungen

$$p[\Psi] = 0 \text{ und } q[\Psi] = 0,$$

wenn darin Ψ als die abhängige Variable betrachtet wird, kein particuläres Integral gemeinsam haben. Es müssen sich alsdann zwei Operations-Symbole R und S bezüglich von der niedrigsten Ordnung $(m-k)$ und $(n-k)$ bestimmen lassen, dergestalt, dass

$$R[p(\Psi)] = S[q(\Psi)]$$

wird. Es ist somit:

$$R[F] = S[f].$$

Jeder dieser Ausdrücke verschwindet durch die Substitution der particulären Integrale, sowohl von $F = 0$ als auch von $f = 0$, also sind in den beiden identischen Gleichungen der $(m+n-k)$ten Ordnung

$$R[F] = S[f] = 0$$

die sämmtlichen Integrale der beiden Gleichungen $F = 0$ und $f = 0$ enthalten; ein Resultat, zu dem schon Herr Thomé durch andere Betrachtungen gelangt ist.

VI.

Es mögen nun zur Erläuterung der vorhergehenden Entwickelungen beispielsweise einige Anwendungen folgen.

1. Die einfachsten und directesten bestehen offenbar in der Untersuchung, ob und in welcher Anzahl zwei gegebene Gleichungen particuläre Integrale gemeinsam haben, in der Ableitung ihrer Gleichung und Benützung dieser zur Reduction der vorgelegten Gleichungen.

Als Beispiel dienen die beiden Gleichungen:

$$F = 4(4x^3+1)\,xy''' - (8x^2-6)\,y'' - 4(4x^3+1)\,xy' + (8x-6)\,y = 0,$$
$$f = 2x(2x^2+x+1)\,y''' + (4x^3+3x+3)\,y'' - (2x-3)\,xy' + (2x-3)\,y = 0,$$

wo also

$$a_0 = (4x^2+1)4x \qquad b_0 = 2x(2x^2+x+1)$$
$$a_1 = -(8x^2-6) \qquad b_1 = 4x^3+3x+3$$
$$a_2 = -(4x^2+1)4x \qquad b_2 = -(2x-3)$$
$$a_3 = 8x^2-6 \qquad b_3 = 2x-3)$$

ist. Dieselben haben blos zwei linear-unabhängige particuläre Integrale gemeinsam, da für sie sowohl R, als auch $\frac{dR}{da''_3}$ verschwindet, während

$$\frac{d^2R}{(da'_3)^2} = 4b_0(a_0 b_1 - a_1 b_0)$$

von Null verschieden ist.

Ihre gemeinsamen Integrale sind also die particulären Integrale der Gleichung:

$$\frac{d^2R}{(da'_3)^2} z'' - 2\frac{d^2R}{da'_2\,da'_3} z' + \frac{d^2R}{(da'_2)} z = 0,$$

welche nach Substitution der Werthe:

$$\frac{d^2R}{(da'_3)^2} = 8(4x^2+5)x^3(2x+1)\,4b_0^2,$$

$$\frac{d^2R}{da'_2\,da'_3} = 4x^2(4x^2+5)(4x^2+1)\,2b_0^2,$$

$$\frac{d^2R}{(da'_2)^2} = 4x^2(4x^2+5)(1-2x)\,4b_0^2,$$

übergeht in:

$$\varphi = 2x(1+2x)y'' + (1+4x^2)y' + (1-2x)y = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich nun die Integration jeder der beiden gegebenen Gleichungen in die Integration zweier einfacherer zerlegen, was an der Gleichung $F=0$ erläutert werde. Da die sämmtlichen Integrale der Gleichung der zweiten Ordnung $\varphi=0$ in $F=0$ enthalten sind, so muss sich F in der Form darstellen lassen

$$F = p(\varphi),$$

wo p ein zu bestimmender, nach φ homogener linearer Differentialausdruck der ersten Ordnung ist. Zur Bestimmung seiner unbekannten Coëfficienten m_1 und m_2 ergeben sich aus der Identität:

$$F \equiv m_1\frac{d\varphi}{dx} + m_2\,\varphi$$

die vier Gleichungen:

$$-4x(4x^2+1) = 2x(1+2x)m_1,$$

$$8x^2-6 = (4x^2+8x+3)m_1 + 2x(1+2x)m_2,$$

$$4x(4x^2+1) = (6x+1)m_1 + (1+4x^2)m_2,$$

$$-8x^2+6 = -2m_1 + (1-2x)m_2,$$

von denen, im Einklange mit den allgemeinen Auseinandersetzungen, je zwei eine Folge der beiden anderen sind.

Hieraus findet man:

$$\varphi = c(4x^2+1)e^x,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Somit ist die Gleichung:

$$2x(1+2x)y'' + (1+4x^2)y' + (1-2x)y = c(4x^2+1)e^x$$

eine Integral-Gleichung der Gleichung $F=0$.

Als zweites Beispiel will ich die homogenen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten benützen und annehmen in (1) und (2) seien bezüglich die a und b Constante. Wie die bekannte Substitution $y=e^{\xi x}$ in dieselben lehrt, entspricht jeder gemeinsamen Wurzel der beiden Gleichungen:

$$a_0\,\xi^n + a_1\,\xi^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

$$b_0\,\xi^m + b_1\,\xi^{m-1} + \ldots + b_m = 0 \qquad (2)$$

ein gemeinsames particuläres Integral. In der That ist auch in diesem Falle die Resultante der beiden Differentialgleichungen, die nach der dialytischen (Sylvester'schen) Methode gebildete Resultante der beiden obigen algebraischen Gleichungen und gehen auch die Kriterien für die Anzahl der gemeinsamen particulären Integrale über in die bekannten Sätze und Formeln über die Anzahl der zwei algebraischen Gleichungen gemeinsamen Wurzeln.

Die Gleichung der gemeinsamen particulären Integrale selbst, wird durch die obige Substitution in die Gleichung der den beiden algebraischen Gleichungen gemeinsamen Wurzeln übergeführt.

Es sind somit in den entwickelten Sätzen und Formeln über die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei homogenen linearen Differentialgleichungen die über gemeinsame Wurzeln algebraischer Gleichungen als sehr specielle Fälle enthalten.

2. Die Thatsache, dass R verschwindet, wenn die beiden Differentialgleichungen, aus deren Coëfficienten dasselbe gebildet wurde, ein particuläres Integral gemeinsam haben, lässt sich auch zur Entscheidung benützen, ob und unter welchen Bedingungen eine gegebene Differentialgleichung particuläre Integrale von bestimmter Form besitzt, sobald nur diese Form durch eine homogene lineare Differentialgleichung charakterisirt werden kann.

Die Formel (7) gibt dann den Werth dieses particulären Integrals.

Ich will beispielsweise zeigen, dass sich auch auf die Weise unmittelbar erkennen lässt, dass die Differentialgleichung der Kugelfunction $P_x^{(n)}$:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

eine ganze rationale Function $n$ten Grades als particuläres Integral besitzt. Da eine ganze rationale Function $p$ten Grades durch die Gleichung:

$$y^{(p+1}=0$$

definirt ist, so kommt die gestellte Frage auf die andere zurück, ob es eine ganze positive Zahl p gibt, für welche die Resultante der beiden obigen Differentialgleichungen:

$$R=\begin{vmatrix} 1-x^2, & -2(p+1)x, & -[p(p+1)-n(n+1)], & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0, & 0, & 0 \\ 0 \quad, & 1-x^2 \quad, & -2px & ,-[p(p+1)-n(n+1)], & 0 & .0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 \quad, & 0 \quad, & 0 & ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0,\ldots\ldots\ldots\ldots & (1-x^2)-2x; & n(n+1) \\ 0 \quad, & 1 \quad, & 0 \quad, & 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & & \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Nun haben aber in dieser Determinante $(p+3)$ten Grades die zwei letzten Zeilen mit den $(p+1)$ letzten Colonnen lauter Nullen gemeinsam und es reducirt sich daher R auf das Product einer Determinante 2ten und $(p+1)$ten Grades und weil die erstere gleich Eins ist, wieder blos auf die letztere. Da diese Determinante:

$$\begin{vmatrix} [p(p+1)-n(n+1)], & 0, & 0, \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ -2px & , -[p(p+1)-n(n+1)], & 0\ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \quad, & 0 \quad, & 0\ldots n(n+1) \end{vmatrix}$$
$$=[p(p+1)-n(n+1)][n(n+1)-p(p+1)]\ldots[n(n+1)]$$

für $p=n$ verschwindet, so genügt der vorgelegten Gleichung, wenn n eine positive ganze Zahl ist, eine ganze rationale Function $n$ten Grades, deren Werth sich aus (7) ergibt.

Auf diese Weise ergeben sich auch unmittelbar die Fälle, in welchen die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

eine ganze rationale Function als particuläres Integral besitzt. Die Resultante dieser und der Gleichung:

$$y^{(p+1)}=0$$

ist:

$$R = \begin{vmatrix} x(1-x), & \left[\binom{p}{1}(1-2x)+\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right], & -(p+\alpha)(p+\beta), & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, \ldots\ldots & x(1-x); & \gamma-(\alpha+\beta+1)\alpha; & -\alpha\beta \\ 1, & 0, & 0, \ldots\ldots & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, \ldots\ldots & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{p+1} \begin{vmatrix} -(p+\alpha)(p+\beta), & 0, & \ldots\ldots 0 \\ \binom{p-1}{1}(1-2x)+\gamma-(\alpha+\beta+1)x, & -(p-1+\alpha)(p-1+\beta) & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots\ldots \alpha\beta \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(p+1)}(p+\alpha)(p+\beta)(p-1+\alpha)(p-1+\beta)\ldots\alpha\beta.$$

Hierans folgt, dass der vorgelegten Gleichung eine ganze rationale Function genügt, sobald α oder β ganze negative Zahlen sind. Der Grad dieser Function ist, sobald nur eine dieser Grössen eine ganze negative Zahl ist, gleich dieser, sonst gleich der numerisch kleineren derselben.

3. Eng mit diesen hängt noch eine andere Art Anwendungen zusammen. Da man die Relationen kennt, welche die Coëfficienten einer homogenen linearen Gleichung erfüllen müssen, damit dieselbe mit einer gegebenen Gleichung ein oder mehrere linear unabhängige particuläre Integrale gemeinsam habe und die Gleichung derselben aufstellen kann, so ist man im Stande, sobald es gelingt, zu der gegebenen eine zweite Gleichung zu construiren, deren Coëfficienten diesen Relationen genügen, entweder unmittelbar — wenn nur R verschwindet — ein particuläres Integral der vorgelegten Gleichung anzugeben oder doch im anderen Falle die Integration der gegebenen Gleichung in die zweier Gleichungen niederer Ordnung zu zerlegen. Es mag diese Art der Anwendung an der Gleichung der Kugelfunction $P_{(x)}^{(1)}$:

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$$

erläutert werden.

Damit dieselbe mit der Gleichung der 2ten Ordnung:

$$a_0 y''+a_1 y'+a_2 y=0$$

ein und nur ein particuläres Integral gemeinsam habe, müssen die unbestimmt gelassenen Coëfficienten a_0, a_1, a_2 derselben derart gewählt werden, dass sie der Bedingung:

$$R = \begin{vmatrix} 1-x^2, & -4x, & 0, & 0 \\ 0, & 1-x^2, & -2x, & 2 \\ a_0, & a_0'+a_1, & -a_1'+a_2, & a_2' \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

und $\dfrac{d^2 R}{da_2'} \neq 0$ genügen. Die Berechnung der Determinante ergibt die Bedingungsgleichung in der Form:

$$2a_0(1-x^2)(a_1'+a_2+xa_2')-(1-x^2)^2(a_1'a_2-a_2'a_1+a_2^2)$$
$$-2(a_1+xa_2)[(1-x^2)(a_0'+a_1)+4a_0x]=0,$$

woraus folgt:

$$a_0'+\frac{4x(a_1+xa_2)-(1-x^2)(a_1'+a_2+xa_2')}{(1-x^2)(a_1+xa_2)}a_0$$
$$+\frac{2a_1(a_1+xa_2)+(a_1'a_2-a_2'a_1+a_2^2)(1-x^2)}{2(a_1+xa_2)}=0.$$

Setzt man nun:

$$\rho=\frac{1}{(1-x^2)^2(a_1+xa_2)},$$

so ergibt sich:

$$a_0 = -\frac{1}{2\rho}\int \rho \frac{(a_1' a_2 - a_1 a_2' + a_2^2)(1-x^2)+2a_1(a_1+xa_2)}{a_1+xa_2}dx.$$

Es hat also jede Differentialgleichung, in der a_0 in dieser Weise durch a_1 und a_2 sich ausdrücken lässt, mit der Gleichung $P_{(x)}^{(1)}$ ein partieuläres Integral y_1 gemeinsam, dessen Werth durch die Formel angegeben wird:

$$y_1' : y_1 = \frac{dR}{da_1'} : \frac{dR}{da_2'} = -\frac{(1-x^2)a_2 - 2a_0}{(1-x^2)a_1+2a_0 x}.$$

Somit liefert der Ausdruck:

$$y_1 = e^{-\int \frac{(1-x^2)a_2-2a_0}{(1-x^2)a_1+2a_0 x}dx}.$$

wenn hierin für a_0 der obige Werth eingesetzt wird, für jeden beliebigen, mit der Natur dieser Entwickelungen verträglichen Werth von a_1 und a_2 stets ein partieuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung.

In ganz derselben Weise lässt sich auch aus der Bedingung, unter welcher die Gleichung:

$$a_0 y^{(n+1)} + a_1 y^{(n)} + \ldots + a_n y = 0$$

mit jener der Kugelfunction $P_{(x)}^{(n)}$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

ein partieuläres Integral gemeinsam hat, dem Verschwinden der Resultante, a_0 als Function der übrigen Coëfficienten $a_1 \ldots a_n$ darstellen, denn die Resultante ist auch in diesem Falle ein nach a_0 homogener linearer Differentialausdruk der ersten Ordnung.

4. Zum Schlusse will ich noch eine Anwendung des Ausdruckes der Resultante berühren und daraus gewisse Functionen herleiten, welche in der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen eine ähnliche Rolle spielen, wie die symmetrischen Functionen in der Theorie der algebraischen Gleichungen,[1] auf die ausführlich einzugehen ich mir jedoch für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

Da die Gleichung (6):

$$R = a_0^m e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx} \begin{vmatrix} f^{n-1}(y_1) \ldots f(y_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f^{n-1}(y_n) \ldots f(y_n) \end{vmatrix} \tag{6}$$

für beliebige Werthe der $b_0, b_1 \ldots b_n$ und der verschiedenen Differentialquotienten dieser Grössen bestehen muss, so müssen, wie man leicht einsieht, die Coëfficienten, welche auf den beiden Seiten der Gleichung denselben Ausdrücken der b und ihrer Differentialquotienten angehören, einander gleich sein. Es lässt sich nun die Determinante $(m+n)$ten Grades R nach dem La Place'schen Satze in ein Aggregat aus Producten je einer Determinanten $m$ten und $n$ten Grades zerlegen, und zwar werden dieselben erhalten, indem man jede Determinante $n$ten Grades aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} b_0^{n-1}, & b_1^{n-1}, \ldots & b_{n+m-1}^{n-1} \\ 0\;\;, & b_0^{n-2}, \ldots & b_{n+m-2}^{n-2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 \ldots\ldots & b_0 \ldots\ldots & b_m \end{vmatrix} \tag{b}$$

mit der aus den übrigen Colonnen der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_0^{m-1}, & a_1^{m-1}, \ldots & a_{n+m-1}^{m-1} \\ 0\;\;, & a_0^{m-2}, \ldots & a_{n+m-2}^{m-2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0, \ldots\ldots & a_0 \ldots\ldots & a_n \end{vmatrix} \tag{a}$$

---

[1] Conf. die Noten des Herrn Appell in den Comptes rendues, Bd. XC und XCI.

gebildeten Determinante $m$ten Grades und einer Potenz von (-1) multiplicirt, deren Exponent die Anzahl der nöthigen Vertauschungen angibt, um diese m Colonnen der Reihe nach zu den m ersten der Matrix zu machen.

In gleicher Weise lässt sich aber auch die rechtsstehende Determinante in (6) als ein Aggregat aus Producten je zweier Determinanten $n$ten Grades darstellen, und zwar werden dieselben erhalten, indem man jede aus der obigen Matrix (b) gebildete Determinante $n$ten Grades mit der aus den gleichstelligen Colonnen der Matrix

$$\begin{Vmatrix} y_1^{(m+n-1)}\,;\, y_1^{(m+n-2)} \cdots y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(m+n-1)}\,;\, y_n^{(m+n-2)} \cdots y_n \end{Vmatrix}$$

gebildeten Determinante $n$ten Grades multiplicirt. Somit ist diese letztere, abgesehen von der Potenz von (-1), der mit dem Factor $a_0^{-n}\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ versehenen aus den restlichen Colonnen der Matrix (a) gebildeten Determinante $m$ten Grades gleich.

Diese Betrachtungen führen also zu dem folgenden Satze:

Bilden $y_1, y_2 \dots y_n$ ein Fundamentalsystem particulärer Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,,$$

so lässt jede aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} y_1^{(\mu)}\,;\, y_1^{(\mu-1)}\,; \cdots y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(\mu)}\,;\, y_n^{(\mu-1)}\,; \cdots y_n \end{Vmatrix},$$

wo $\mu > n$ ist, entnommene Determinante $n$ten Grades durch ein Product aus $e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ und einer aus den Coëfficienten der Gleichung und deren Differentialquotienten rationalen Function ausdrücken.

Von den Folgerungen, die diese Thatsache zulässt, will ich nur eine hervorhebend die Aufgabe lösen:

Die homogene lineare Differentialgleichung zu bilden, deren jedes particuläre Integral ein gegebener homogener linearer Differentialausdruck eines particulären Integrals einer gegebenen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Es seien $y_1, y_2 \dots y_n$ ein Fundamentalsystem particulärer Integrale der gegebenen homogenen linearen Differentialgleichung:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

und es sei die homogene lineare Differentialgleichung der $n$ten Ordnung zu bilden, deren particuläre Integrale z mit den y der gegebenen in der Beziehung stehen:

$$z = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \dots + b_m y.$$

Bezeichnet z_i das Resultat der Substitution $y = y_i$ in diese Relation, so ist die gesuchte Gleichung:

$$\begin{vmatrix} z^{(n)},\; z^{(n-1)} \dots z \\ z_1^{(n)},\; z_1^{(n-1)} \dots z_1 \\ \cdots\cdots \\ z_n^{(n)},\; z_n^{(n-1)} \dots z_n \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist somit in derselben der Coëfficient von $z^{(i)}$

$$(-1)^{n-i} \begin{vmatrix} z_1^{(n)} \dots z_1^{(i+1)},\; z_1^{(i-1)} \dots z_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n^{(n)} \dots z_n^{(i+1)},\; z_n^{(i-1)} \dots z_n \end{vmatrix}$$

und nach der Bedeutung der z ist er das Product der beiden Matrices:

$$\left\| \begin{array}{l} y_1^{m+n}, \ldots y_1^{n+i+1}, \; y_1^{m+i-1}, \ldots y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n^{m+n}, \ldots y_n^{m+i+1}, \; y_n^{m+i+1}, \ldots y_n \end{array} \right\|$$

$$(-1)^{n-i} \left\| \begin{array}{l} b_0^n, \; b_1^n \quad , \ldots\ldots\ldots b_{m+n}^n \\ 0 \;, \; b_0^{n-1}, \ldots\ldots\ldots b_{m+n-1}^{n-1} \\ 0 \;, \; 0 \quad , \ldots b_0 \ldots b_n \end{array} \right\|,$$

wo b_k^i den in II angegebenen Werth besitzt.

Die Determinanten $n$ten Grades der ersten Matrix lassen sich aber, wie eben gezeigt wurde, durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung und ihre Differentialquotienten ausdrücken, und es ist somit die gestellte Aufgabe gelöst.

VII.

Vermöge der gewonnenen Resultate ist man auch in den Stand gesetzt, die Anzahl der zwei vollständigen linearen Differentialgleichungen gemeinsamen linear-unabhängigen particulären Integrale zu bestimmen und deren Gleichung aufzustellen.

Ich gehe hiebei von der folgenden Bemerkung aus.

Ist

$$f = A + a$$

eine vollständige lineare Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit $A = 0$ als ihrer homogenen, so wird bekanntlich, wenn $y_1, y_2 \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem particulärer Integrale von $A = 0$ und H ein Integral von $f = 0$, ferner die c willkürliche Constante bedeuten, ihr vollständiges Integral durch

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + H$$

dargestellt. Aus dieser Formel folgt unmittelbar:

Zwei lineare Differentialgleichungen, deren reducirte kein particuläres Integral gemeinsam haben, können blos ein particuläres Integral gemeinschaftlich besitzen. Haben zwei lineare Differentialgleichungen ein particuläres Integral gemeinsam, so ist jede Summe aus diesem und einer linearen Verbindung, der den beiden reducirten Gleichungen gemeinsamen particulären Integrale, wieder ein gemeinsames particuläres Integral. Und umgekehrt.

Ich will nun zunächst zeigen, dass im Falle, die beiden homogenen Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ zweier gegebenen linearen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f = A + a \\ \varphi = B + b \end{array}\right\} \tag{1}$$

kein particuläres Integral gemeinsam haben, sich unmittelbar entscheiden lässt, ob diese ein gemeinsames Integral besitzen und wie dieses zu finden sei.

Die aus (1) abgeleitete homogene lineare Differentialgleichung

$$\Psi = bf - a\varphi = bA - aB = 0 \tag{2}$$

wird durch jedes den beiden gegebenen Gleichungen gemeinsame particuläre Integal befriedigt; desgleichen die lineare Differentialgleichung

$$\alpha \frac{df}{dx} + \alpha_1 f - \left(\beta \frac{d\varphi}{dx} + \beta_1 \varphi\right) = 0$$

die zu einer bomogenen wird, wenn die Function von x: $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ der Gleichung genügen:

$$\alpha \frac{da}{dx} + \alpha_1 a - \beta \frac{db}{dx} - \beta_1 b = 0,$$

durch welche Annahme sie dann übergeht in

$$\chi = \alpha \frac{dA}{dx} + \alpha_1 A - \beta \frac{dB}{dx} - \beta_1 B. \tag{3}$$

Es soll nun untersucht werden, in welchem Zusammenhange umgekehrt ein den Gleichungen (2) und (3) gemeinsames Integral mit den particulären Integralen der Gleichungen (1) steht.

Für ein particuläres Integral der Gleichung (2) ist

$$f = \frac{a}{b} \varphi \tag{5}$$

die Substitution dieses Werthes von f und des Integrals von (2) in (3) ergibt unter Berücksichtigung von (4)

$$b^2 \chi = \alpha a (b\varphi' - b'\varphi) + b\beta(b'\varphi - b\beta\varphi').$$

Ist nun dieses particuläre Integral beiden Gleichungen (2) und (3) gemeinsam, so verschwindet für dasselbe auch der eben abgeleitete Ausdruck und es ist daher

$$(b\varphi' - b'\varphi)(\beta b - \alpha a) = 0$$

Hieraus folgt, da man α und β stets so gewählt annehmen darf, dass $b\beta - a\alpha$ nicht verschwindet

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{b'}{b}$$

oder

$$\varphi = cb,$$

wo c eine Constante bedeutet.

Die Substitution dieses Werthes in (5) ergibt auch

$$f = ca.$$

Es ist somit jedes den beiden Gleichungen $\psi = 0$ und $\chi = 0$ gemeinsam particuläre Integral auch den beiden Gleichungen

$$A + (1-c)a = 0$$
$$B + (1-c)b = 0$$

gemeinsam. Die hierin auftretende willkürliche Constante $1 - c = k$ kann alle Werthe mit Ausnahme von Null annehmen, da sonst gegen die ausdrückliche Voraussetzung die beiden reducirten Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ ein particuläres Integral gemeinsam hätten. Ist aber k von Null verschieden, so ist jedes particuläre Integral von $A + ka = 0$ oder $B + kb = 0$ dividirt durch k ein particuläres Integral bezüglich von $f = 0$ oder $\varphi = 0$.

Es ist also durch diese Überlegungen die Frage nach der Gemeinsamkeit eines particulären Integrals bei den linearen Differentialgleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ zurückgeführt auf die Untersuchung der beiden homogenen linearen Differentialgleichungen $\varphi = 0$ und $\chi = 0$. Auch diese können unter den gemachten Voraussetzungen blos ein particuläres Integral gemeinsam haben, welches also immer nach (7) gefunden werden kann. Multiplicirt mit einem constanten Factor, der somit unmittelbar durch Substitution des Integrals in eine der Gleichungen (1) gefunden wird, ist dann dasselbe das einzige mögliche den beiden Gleichungen (1) gemeinsame particuläre Integral.

Auf den eben behandelten Fall, dass die reducirten Gleichungen der beiden Gleichungen (1) kein particuläres Integral gemeinsam haben, lässt sich nun der allgemeinen zurückführen. Denn es lassen sich, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, die beiden Gleichungen durch Einführung einer neuen Variablen an Stelle der abhängigen, in zwei andere transformiren, deren reducirte Gleichungen kein particuläres Integral gemeinsam haben. Ist nämlich $z = 0$ die nach (8) immer leicht herstellbare Gleichung der den beiden reducirten

Gleichungen gemeinsamen particulären Integrale, so lassen sich (V) Differentialausdrücke $p(z)$ und $q(z)$ auffinden, dergestalt, dass

$$A = p(z) \text{ und } B = q(z)$$

ist, wobei $p(z)$ und $q(z)$ kein Integral gemeinsam haben.

Die beiden Gleichungen (1) gehen dann über in die beiden

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = p(z) + a \\ f = q(z) + b \end{array}\right\}, \qquad (1')$$

deren reducirte in der That kein particuläres Integral gemeinsam haben.

Diese Gleichungen (1′) können also nach dem Vorhergehenden höchstens ein particuläres Integral gemeinsam haben, dessen Bestimmung oben gezeigt wurde. Besitzen sie nun ein gemeinsames Integral und wird dasselbe etwa mit v bezeichnet, so ist jedes Integral der Gleichung

$$z = v$$

den beiden gegebenen Gleichungen (1) gemeinsam, wie auch umgekehrt jedes gemeinsame Integral dieser Gleichungen der Gleichung $z = v$ genügt.